Barem de corectare clasa a V-a

I 1. Soluție:

a) $x_n = 2n + 5 = 2n + 4 + 1 = 2(n + 2) + 1 \Rightarrow r = 1$ b) $x_n = 2009 \Rightarrow 2n + 5 = 2009 \Rightarrow n = 1002$

c) $x_n \le 2009 \Rightarrow n \le 1002$, deci inegalitatea este adevărată pentru 1003 valori ale lui n.

2. $\dfrac{\overline{3a3a3a3a}}{\overline{7a7a7a7a}} = \dfrac{\overline{3a}\left(10^6 + 10^4 + 10^2 + 1\right)}{\overline{7a}\left(10^6 + 10^4 + 10^2 + 1\right)} = \dfrac{\overline{3a}}{\overline{7a}}; a \in \{0;1;2;...;9\}$

Pentru a cifră pară, fracția $\dfrac{\overline{3a}}{\overline{7a}}$ se simplfică prin 2, iar pentru a = 5 se simplifică prin 5.

Convine $a \in \{1;3;7;9\}$.

II.

a) $44^2 + 7^2 + 5^2 = 2010$

b) Pentru n = 2,

$$2010^2 = 10^2 \cdot 201^2 = 10^2 \cdot 400401 = 10^2(40000 + 400 + 1) = 10^2\left(200^2 + 20^2 + 1^2\right) = 2000^2 + 200^2 + 10^2$$

Pentru n par, $n \ge 4$, avem n = 2k. Rezultă:

$$2010^{2k} = 2010^{2k-2} \cdot 2010^2 = 2010^{2k-2}\left(2000^2 + 200^2 + 10^2\right)$$
$$= (2010^{k-1} \cdot 2000)^2 + (2010^{k-1} \cdot 200)^2 + (2010^{k-1} \cdot 10)^2$$

Pentru n impar, $n \ge 3$, avem n = 2k + 1. rezultă:

$$2010^{2k+1} = 2010^{2k} \cdot 2010 = 2010^{2k}\left(44^2 + 7^2 + 5^2\right) = \left(2010^k \cdot 44\right)^2 + \left(2010^k \cdot 7\right)^2 + \left(2010^k \cdot 5\right)^2$$

III.

7n-11=19k => 7n=19k+11 => 7n=7(2k+7)+5k+4 => (5k+4)⋮7 => k=2,9,16,23,30,.

11n-13=19p => 11n=19p+13 => 11n=11(p+1)+8p+2 => (4p+1) ⋮11 => p=8,19,30,41,52,.....

9n-15=19r => 9r=19r+15 => 9r=9(2r+1)+r+6 => (r+6) ⋮9 => r=3,12,21,30,…

a) $min_X=38$, $min_Y=152$, $min_Z=57$ b) $570\in X$, $570\in Y$, $570\in Z \Rightarrow X\cap Y\cap Z \neq \varnothing$

c) Presupun că 38 şi 570 sunt elementele comune ale lui T şi X, deci

$an_1-b=38$ şi $an_2-b=570$ prin scădere => $a(n_2-n_1)=532$ => $a(n_2-n_1)=2^2*7*19$, a nu poate fi 19,

iau a=28 deci 28n-b=38 => b=2c => 14n-c=19 => c=14n-19

$c_{min}=9$ => b=18 deci $T=\{28n-18 \mid n\in N^*\}$, $T_{min}=38$, $570\in T$

IV.

a) Linia 1 are un element, $1 = 2 \cdot 1 - 1$

Linia 2 are trei elemente, $3 = 2 \cdot 2 - 1$

Linia 3 are cinci elemente, $5 = 2 \cdot 3 - 1$

…

Linia 10 are $2 \cdot 10 - 1 = 19$ elemente

Pentru a determina primul element al liniei 10, adunăm numărul elementelor de pe primele 9 linii: $1 + 3 + \ldots + (2\cdot 9 - 1) = 81$

Rezultă că cel mai mic element al liniei 10 este al 82-lea număr natural impar, adică $2 \cdot 82 - 1 = 163$, deci linia 10 are elementele: 163, 165, …, 199.

b) Linia 2010 are $2 \cdot 2010 - 1 = 4019$ elemente $1 + 3 + 5 + \ldots + (2 \cdot 2009 - 1) = 2009^2$

Cel mai mic element de pe linia 2010 este al $2009^2 + 1$-lea număr natural impar, adică $2\left(2009^2 + 1\right) - 1 = 2 \cdot 2009^2 + 1$. Restul împărțirii acestuia la 2009 este 1.