CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SFERA"
EDIŢIA a II-a
BĂILEŞTI, 12 martie 2005

CLASA a IV-a

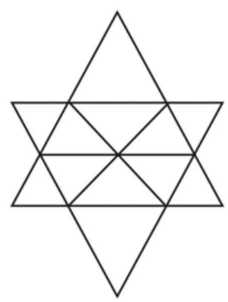
Partea I (40 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect

1. Care este numărul care lipseşte din şirul :
3; 7; 15; 31; 127; 255
a) 62; b) 45; c) 63; d) 115.

2. Alina, Ionela şi Gina au împreună 40 de ani. Câți ani vor avea peste 4 ani ?
a) 44 ; b) 47 ; c) 52 ; d) 58.

3. Câte triunghiuri sunt în figura alăturată ?
a) 12; b) 18; c) 14; d) 20



4. Perimetrul unei grădini sub formă de dreptunghi este de 540m. Lățimea măsoară jumătate din lungime. Care este lungimea grădinii ?
a) 180m ; b) 270m ;
c) 340m ; d) 360m.

5. Am între 100 şi 200 de nuci. Dacă le împart în grupe de câte 2, 3, 4, 5, 6, 9 sau 15 nuci, îmi rămâne de fiecare dată câte o nucă. Deci am :
a) 120 ; b) 131 ; c) 141 ; d) 181.

Partea a II-a

*Pentru problemele **1.** şi **2.** scrieți pe lucrare rezolvările complete*

1. (20p) Găsiți valoarea lui a din egalitatea:

$$1+2+3+...+44+45+46+47+a=1475$$

,,Sfera", nr.4

2. (30p) Suma a patru numere naturale este 110. Suma primelor două numere este 110. Suma primelor două numere este cu 6 mai mare decât suma celorlalte două. Aflați numerele ştiind că primele două sunt pare consecutive, iar ultimele două sunt impare consecutive.

înv. Vasilica Mitrică

Timp de lucru *2 ore. Din oficiu se acordă 10 puncte.*

Clasa a V-a

Partea I (40 puncte)
Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Numărul $7^1+7^2+7^3+\ldots+7^{998}+7^{999}$ se divide cu:
a) 33; b) 57; c) 42; d) 37.

2. Egalitatea $11^x+11^{2x}+11^{3x}=1463$ are loc pentru x egal cu:
a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.

3. Dacă $a+2b=5$; $2a+b=4$, atunci $2a^2+5ab+2b^2$ este:
a) 9; b) 20; c) 54; d) 45.

4. Notăm $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n=n!$ Atunci 40! Se divide cu:
a) 3^{18}; b) 3^{19}; c) 3^{17}; d) 3^{16}

5. Rezultatul calculului:
$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{2}{n+1}$ este:
a) $\frac{n-1}{n+1}$; b) $\frac{n+2}{n+1}$; c) $\frac{n+3}{n+1}$; d) $\frac{n+1}{n-1}$.

Partea a II-a
Pentru problemele ***1.*** *şi* ***2.*** *scrieți pe lucrare rezolvările complete*

1. (20p) Suma dintre un număr prim şi 1497 este numărul natural de forma: $\overline{a^2b^2c^29}$. Determinați cifrele *a, b, c.*

,,Sfera" nr.5

2. (30p) Fie $a=1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2$
$b=(2n)^2+(2n-2)^2+\ldots+2^2$.
Să se arate că b–a se divide cu n(2n+1).

prof. Ştefan Nițoi, Băileşti

Timp de lucru *2 ore. Din oficiu se acordă 10 puncte.*

Clasa a VI-a

Partea I (40 puncte)
Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Restul împărțirii numărului $A=50652\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ cifre}}$, n≥1, la 37 este:
a) 35; b) 36; c) 34; d) 33

2. Într-o urnă se află 2 bile albe, 9 bile galbene, 12 bile roşii, 15 bile verzi. Pentru a fi siguri că vom scoate cel puțin patru bile de aceeaşi culoare, numărul minim de bile ce trebuie extras este:

a) 14 bile; b) 13 bile; c) 12 bile; d) 11 bile.

3. Apa care se transformă în gheață își mărește volumul cu 9%. Dar dacă gheața se topește, cu cât își micșorează volumul?

a) $8\frac{28}{109}$%; b) 9,89%; c) 9%; d) 10%.

4. Fie n puncte coliniare $A_0, A_1, ..., A_n$ (în această ordine) și $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 3$. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ notăm B_i mijlocul segmentului $[A_0A_i]$. Atunci:

a) $A_0A_n = 2B_1B_{n-1}$; b) $A_1A_{n-1} = 2B_1B_n$;
c) $A_0A_{n-1} = 2B_1B_n$; d) $A_1A_n = 2B_1B_n$

5. Pe laturile $[Ox$ și $[Oy$ ale unui unghi propriu $\angle xOy$ alegem punctele A și respectiv B astfel încât $[OA] \equiv [OB]$ iar în interiorul unghiului alegem un punct C astfel încât
$[CA] \equiv [CB]$. Stabiliți care propoziție nu este întotdeauna adevărată:

a) $\Delta OAC \equiv \Delta OBC$; b) OC mediatoarea lui $[AB]$;
c) $\angle AOB \equiv \angle ACB$; d) $[CO$ bisectoarea lui $\angle ACB$.

Partea a II-a

*Pentru problemele **1.** și **2.** scrieți pe lucrare rezolvările complete*

1. (20p) Să se determine $x \in \mathbf{Z} \setminus \{-1\}$ pentru care $\frac{5x-3}{x+1}$ este pătrat perfect.

prof. Mihaela Cioplea, Băilești

2. (30p) Fie un unghi $\angle AOB$ și $(OC$, $(OD$ două semidrepte diferite în interiorul său astfel încât :

i) $m(\angle AOD) = 66^0$; ii) $m(\angle AOC) - m(\angle BOD) = 23^0$

a) Calculați $m(\angle BOC)$

b) În plus, știind că $(OC$ este bisectoarea unghiului $\angle AOB$, calculați $m(\angle COD)$.

,,Sfera" nr.1/2003-2004

Timp de lucru *2 ore. Din oficiu se acordă 10 puncte.*

Clasa a VII-a

Partea I (40 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Valoarea lui $x \in \mathbf{N}$ pentru care
$\frac{x(x-1)(x+1)+3}{x(x-1)(x+1)-15} = \frac{x(x-1)(x+1)-2}{x(x-1)(x+1)-10}$ este:

a) 1; b) 2; c) 4; d) 2005.

2.Fie triunghiul echilateral ABC de latură a. Punctul $M\in(BC$ astfel încât $CM=2a$ şi punctul $N\in(BA$ astfel încât $AN=a$. Valoarea raportului $\frac{AB}{AM}$ este:

a) $\frac{\sqrt{7}}{7}$;   b) $\frac{\sqrt{5}}{5}$;   c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$;   d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3. Cinci consăteni *A, B, C, D, E* stau ,,în deal” şi ,,în vale”. Cei ,,din deal” spun tot timpul adevărul, iar cei ,,din vale” mint tot timpul. Dacă:

(1) *A* spune că *B* stă ,,în deal”;
(2) *C* spune că *D* stă ,,în vale”;
(3) *E* spune că *A* stă ,,în deal”;
(4) *B* spune că *C* stă ,,în vale”.
(5) *D* spune că *B* şi *E* stau în zone diferite, atunci

numărul celor care stau ,,în vale” este:

a) 1;   b) 2;   c) 3;   d) 4.

4. Pe laturile (*BC*) şi (*CD*) ale pătratului *ABCD* se iau respectiv punctele *M* şi *N* astfel încât $\angle AMB \equiv \angle AMN$. Măsura unghiului *MAN* este:

a) 60^0;   b) 30^0;   c) 75^0;   d) 45^0.

5. Restul împărţirii numărului:

$$11^{n^5+n^4+1}+19^{3n^2+3n+2}$$ la 5 este:

a) 4;   b) 3;   c) 2;   d) 1.

Partea a II-a

Pentru problemele ***1.*** *şi* ***2.*** *scrieţi pe lucrare rezolvările complete*

1. (20p) Să se arate că oricare ar fi numerele întregi *x, y, z* care verifică relaţia $7x+2y=5z$, numărul:

$a=(x+y)(y+z)(x+z)$ este multiplu de 70.

,,Sfera” nr.4

2. (30p) Pe laturile (*AB*) şi (*AD*) ale paralelogramului *ABCD* se iau punctele *E* şi *F* astfel încât $\frac{AE}{AB}=\frac{2}{3}$ şi $AF=FD$. În ce raport sunt împărţite segmentele [*FE*] şi [*AC*] de punctul lor de intersecţie?

prof.A.I.Curea, Băileşti

Timp de lucru *2 ore. Din oficiu se acordă 10 puncte.*

Clasa a VIII-a

Partea I (40 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieţi pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie a, b numere reale pozitive oarecare astfel încât:

$$a+\frac{a}{b}+b+\frac{b}{a}=10.$$ Atunci:

a) $ab<16$; b) $ab>16$; c) $ab\le 16$; d) $ab\ge 16$.

2. Dacă $A=\frac{1+2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, atunci:

a) $A\in\mathbf{N}$; b) $A\in\mathbf{Z}\setminus\mathbf{N}$; c) $A\in\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$; d) $A\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$.

3. Suma soluțiilor distincte ale ecuației

$(x+2)(x+3)(x-4)(x-5)=144$ este:

a) -3; b) 3; c) 4 ; d) -4.

prof. Ion Pătraşcu, Craiova

4. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, de muchie a, E este mijlocul lui $[AD]$, F este mijlocul lui $[BB']$. Paralela prin O, centrul lui $A'B'C'D'$, la EF, intersectează (ADD') în G. Care afirmație este falsă ?

a) $EF=\frac{a\sqrt{6}}{2}$; b) $OG=\frac{EF}{2}$; c) $OG=\frac{a\sqrt{6}}{4}$; d) $OG\perp OF$

5. Fie $VABC$ o piramidă oarecare, cu baza ABC triunghi echilateral de centru O. Paralelele prin O la VA, VB, VC intersectează fețele opuse respectiv în A', B', C'. Dacă

$S=\frac{OA'}{VA}+\frac{OB'}{VB}+\frac{OC'}{VC}$, atunci:

a) $S=\frac{2}{3}$; b) $S=\frac{1}{3}$; c) $S=1$; d) $S=2$

Partea a II-a

*Pentru problemele **1.** şi **2.** scrieți pe lucrare rezolvările complete*

1. (20p) Se secționează piramida patrulateră regulată $VABCD$, în care $VA=AC=x\sqrt{2}$, cu un plan ce conține mijlocul muchiei VA şi este perpendicular pe muchia CV. Determinați aria şi forma secțiunii.

,,Sfera" nr.4

2. (30p) Fie funcția liniară $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ astfel încât:

$$\underbrace{f(f(f\ldots(f(f(x))}_{2005 \text{ de } f \text{ ori}}\ldots)))=2005^{2005}x+2005^{2004}\cdot 2004+$$

$+2005^{2003}\cdot 2004+\ldots+2005^{2}\cdot 2004+2005\cdot 2004+2004$, orice $x\in\mathbf{R}$. Arătați că:

$$\sqrt{f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(2005)}\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$$

prof. Virgil Cioplea, Băileşti

Timp de lucru *2 ore. Din oficiu se acordă 10 puncte.*

Clasa a IX-a

Partea I (40 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se dă ecuația: $2x+[x]=x^2$. Suma soluțiilor ecuației este:

a) 1; b) $1+\sqrt{3}$; c) $4+\sqrt{3}$; d) 3.

2. Fie numerele $x, y, z \in [0, +\infty)$ care verifică relațiile:

$x+3y+2z=3$ şi $3x+3y+z=4$.

Maximul expresiei $E=3x-2y+4z$ este:

a) 7; b) 5; c) 4; d) 9.

3. Se consideră şirul: $3^2+2, 13^2+2, 23^2+2, \ldots, 1003^2+2$.

Numărul de numere divizibile cu 3 este:

a) 66; b) 33; c) 99; d) 0.

4. Fie $[AB]$ şi $[CD]$ două coarde perpendiculare ale unui cerc de centru O. Dacă $AB \cap CD = \{P\}$, atunci:

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ este:

a) $\vec{0}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$; c) $2\overrightarrow{PO}$; d) $4\overrightarrow{PO}$.

5. Fie H şi O ortocentrul respectiv centrul cercului circumscris ΔABC. Atunci $\overrightarrow{OH}$ este:

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$; b) $3\overrightarrow{OA}$; c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$;

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

Partea a II-a

*Pentru problemele **1.** şi **2.** scrieți pe lucrare rezolvările complete*

1. (20p) Fie mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, \ldots, 6400\}$ şi B o submulțime a lui A cu proprietatea că $\forall x, y \in B, x \neq y \Rightarrow$
$\Rightarrow x \cdot y \notin B$. Determinați numărul maxim de elemente ale mulțimii B.

prof.Gabriel Tica, Băileşti

2. (30p) Fie triunghiul ABC, I centrul cercului înscris, iar G centrul de greutate al ΔABC. Arătați că $IG // BC$ dacă şi numai dacă $AB+AC=2BC$ (soluție vectorială).

Timp de lucru *2 ore. Din oficiu se acordă 10 puncte.*

Clasa a X-a

Partea I (40 puncte)

Pentru întrebările 1-5 scrieți pe lucrare litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Soluția inecuației:

$$\log_2\left(9^x+3^{2x-1}-2^{x+\frac{1}{2}}\right)\le x+\frac{7}{2} \text{ este:}$$

a) $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$; b); $\left(\log_{\frac{9}{2}}\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{3}{2}\right]$ c) $\left[\log_{\frac{9}{2}}\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{3}{2}\right]$

d) $\left(\frac{3}{2},\frac{5\sqrt{2}}{4}\right]$

2. Numărul termenilor raționali ai dezvoltării $\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[5]{2}\right)^{135}$ este:

a) 9; b) 10; c) 70; d) 65.

3. Valoarea sumei $S=\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\cdot C_n^k$ este:

a) $n\cdot 2^n$; b) $(n+1)\cdot 2^n$; c) $(2n+1)\cdot 2^n$; d) $(n+2)\cdot 2^n$

4. Fie ecuația: $9^{\frac{3}{2}-\cos^2 x}-10\cdot 3^{\sin^2 x}+3=0$. Numărul soluțiilor ecuației din intervalul $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ este:

a) 2; b) 1; c) 0; d) 4

5. Valoarea lui $a\in\mathbf{R}$ pentru care ecuația:

$z^2-(8+i)z+2a+3i=0$ are o rădăcină reală este:

a) $\frac{3}{2}$; b) 1; c) $\frac{15}{2}$; d) 4.

Partea a II-a

*Pentru problemele **1.** și **2.** scrieți pe lucrare rezolvările complete*

1. (20p) Determinați toate funcțiile $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ care verifică condițiile: $f(0)=2$ și $f(f(n))=f(f(n+1)+1)=n$, $\forall n\in\mathbf{Z}$.

prof.Gabriel Tica, Băilești

2. (30p) Arătați că rădăcinile ecuației:

$6iz^5+5iz^4-5z-6=0$, au modulul egal cu 1.

,,Sfera" 1/2003-2004